Przykładowe rozwiązanie zadania 1

Oczywiście rozważana w zadaniu funkcja $x \mapsto x\sin(\pi x)/\big(x^2+2x+5\big)$ nie jest na prostej rzeczywistej całkowalna w sensie Lebesgue'a:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\right| \mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+0{,}25}^{n+0{,}75} |\sin(\pi x)| \cdot \left|\frac{x}{x^2+2x+5}\right| \mathrm{d}x$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n+0{,}25}^{n+0{,}75} \frac{\mathrm{d}x}{x+2+5x^{-1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{n+8} = \infty.$$

Czynnik $\sin(\pi x)$ ma jednak na prostej rzeczywistej ograniczoną funkcję pierwotną $-\cos(\pi x)/\pi$, a czynnik $x/\big(x^2+2x+5\big)$ jest dla $|x| > 2024$ **monotonicznie** zbieżny do zera zarówno przy $x \to \infty$, jak i wtedy, gdy $x \to -\infty$, więc na mocy kryterium Dirichleta zbieżności całek niewłaściwych zbieżne są całki niewłaściwe

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x,$$

czyli zbieżna jest całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_a^b \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x$$

i – w szczególności – spełniona jest równość

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x.$$

Tę ostatnią granicę wystarczy więc wyznaczyć, by rozwiązać zadanie.

Uwaga: Granicę tę nazywa się wartością główną całki i oznacza się ją symbolem p.v. (skrót zwrotu *principal value*):

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, \mathrm{d}x.$$

Przykład (ostrzeżenie): Wprawdzie

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} x\, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\, \mathrm{d}x = 0,$$

lecz nie istnieje granica

$$\lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty} \int_a^b x\, \mathrm{d}x,$$

gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n^2} x\,\mathrm{d}x = \big(n^4 - n^2\big)/2 = \infty,$$

za to

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n^2}^{n} x\,\mathrm{d}x = \big(n^2 - n^4\big)/2 = -\infty.$$

Widać więc, że implikacja odwrotna do omówionej powyżej nie musi być prawdziwa: z istnienia wartości głównej całki niewłaściwej **nie wynika** zazwyczaj zbieżność tej całki – dlatego właśnie skorzystaliśmy ze szczególnych własności funkcji $x \mapsto x\sin(\pi x)\big/\big(x^2+2x+5\big)$.

Obliczymy wartość główną badanej całki, korzystając z całkowania po półkolistym konturze $\Gamma_R = \gamma_R$ wyznaczonym przez gładkie krzywe $\eta_R\ :\ [-R,R] \to \mathbb{C}$ oraz $\gamma_R\ :\ [0,\pi) \to \mathbb{C}$ określone, odpowiednio, wzorami

$$\eta_R(t) = t,\ \ \gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Ponieważ $\eta_R(R) = R = \gamma_R(0)$ oraz $\gamma_R(\pi) = -R = \eta_R(-R)$, to Γ_R jest krzywą zamkniętą kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$.

Łatwo sprawdzić, że $z^2+2z+5 = \big(z-(2\mathrm{i}-1)\big)\big(z+(2\mathrm{i}+1)\big)$ dla każdego $z\in\mathbb{C}$. Funkcja $z\mapsto f(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}\big/\big(z^2+2z+5\big)$ jest zatem na zbiorze $\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}-1,-2\mathrm{i}-1\}$ iloczynem funkcji holomorficznych, a więc jest na nim holomorficzna, skoro zaś w punktach $z = 2\mathrm{i}-1$ oraz $z = -2\mathrm{i}-1$ czynniki z oraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}$ przyjmują wartości różne od zera, to obie te osobliwości punktowe są biegunami prostymi (tzn. jednokrotnymi, czyli rzędu jeden) owej funkcji. Gdy $R > \sqrt{5}$, to indeks krzywej zamkniętej Γ_R względem punktu $2\mathrm{i}-1$ jest równy 1, a jej indeks względem punktu $-2\mathrm{i}-1$ jest zerowy. Na mocy twierdzenia o residuach

$$\int_{\Gamma_R}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}(f;2\mathrm{i}-1).$$

Funkcja holomorficzna $g\ :\mathbb{C}\setminus\{-2\mathrm{i}-1\}\to\mathbb{C}$ określona wzorem

$$g(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}\big/\big(z+2\mathrm{i}+1\big)$$

rozwija się wokół punktu $2\mathrm{i}-1$ w szereg potęgowy:

$$g(z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\big(z-(2\mathrm{i}-1)\big)^n$$

dla pewnych liczb zespolonych $u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots$ Promień zbieżności tego szeregu to 4 (odległość między punktem $2\mathrm{i}-1$ a jedyną osobliwością punktową funkcji g, czyli punktem $-2\mathrm{i}-1$), ale w naszych rozważaniach istotne jest tylko to, że promień ten jest większy od zera. Kładąc $z = 2\mathrm{i} - 1$, otrzymujemy zatem równość

$$u_0 = g(2\mathrm{i}-1) = (2\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2\mathrm{i}-1)}\big/\big((2\mathrm{i}-1)+2\mathrm{i}+1\big) = \frac{2\mathrm{i}-1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}^2}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}$$
$$= \frac{2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\pi}\cdot\big(\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)\big) = \frac{2+\mathrm{i}}{4}\mathrm{e}^{-2\pi}\cdot(-1) = -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{4}.$$

Ponieważ dla wszystkich z z otwartego otoczenia punktu $1 - 2\mathrm{i}$ mamy

$$f(z) = g(z)\big/\big(z-(2\mathrm{i}-1)\big) = u_0\big(z-(2\mathrm{i}-1)\big)^{-1} + u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\big(z-(2\mathrm{i}-1)\big)^n,$$

to

$$\operatorname{res}(f; 2\mathrm{i}-1) = u_0 = -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{4}\mathrm{i},$$

toteż

$$\int_{[-R,R]} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z = \int_{\eta_R \vee \gamma_R} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\Gamma_R} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}(f; 2\mathrm{i}-1) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{4}\mathrm{i}\right)$$
$$= -\mathrm{i}^2\frac{\pi\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \pi\mathrm{e}^{-2\pi}\mathrm{i} = \frac{\pi\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \pi\mathrm{e}^{-2\pi}\mathrm{i}.$$

Zauważmy, że $\pi > 0$, a

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{z^2+2z+5} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}+5z^{-2}} = 0,$$

więc na mocy lematu Jordana

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z}{z^2+2z+5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}\,\mathrm{d}z = 0,$$

czyli

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \pi\mathrm{e}^{-2\pi}\mathrm{i}.$$

To pozwala nam zakończyć rozwiązanie zadania:

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{x\operatorname{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}\big)}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \operatorname{Im}\left(\frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}}{x^2+2x+5}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \operatorname{Im}\int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_{[-R,R]} \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z,$$

więc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{z^2+2z+5}\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{e}^{-2\pi}.$$

Przykładowe rozwiązanie zadania 2

Oprócz wskazanego w zadaniu wielomianu P określonego wzorem $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ rozważmy wielomiany Q oraz R określone, odpowiednio, wzorami $Q(z) = 4z^5$ i $R(z) = 6z^2$. Funkcje wielomianowe P, Q oraz R są holomorficzne na całej płaszczyźnie zespolonej (czyli całkowite). Zadajmy gładkie krzywe zamknięte $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ wzorami, odpowiednio,

$$\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \;\; \gamma_2(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

skąd wynika, że $\gamma_1^* = \partial D(0, 1) = C(0, 1)$ oraz $\gamma_2^* = \partial D(0, 2) = C(0, 2)$, przy czym indeks krzywej γ_1 względem każdego punktu koła $D(0, 1)$ i indeks krzywej γ_2 względem każdego punktu koła $D(0, 2)$ równy jest 1, indeks krzywej γ_1 względem każdego punktu zbioru $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 1)$ i indeks krzywej γ_2 względem każdego punktu zbioru $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 2)$ równy jest zaś 0. Ponieważ każda liczba $z \in \gamma_1^*$ spełnia warunek $|z| = 1$, a więc także

$$|P(z)-R(z)| = |4z^5+1| \le |4z^5|+|1| = 4|z|^5+1 = 5 < 6 = 6|z|^2 = |R(z)|,$$

czyli w szczególności $|P(z) - R(z)| < |R(z)|$, to na mocy twierdzenia Rouchégo wielomiany P i R mają w kole $D(0, 1)$ taką samą liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami). Skoro zatem wielomian R ma na płaszczyźnie zespolonej tylko jedno miejsce zerowe, i jest ono pierwiastkiem krotności dwa w punkcie $z = 0$ należącym do koła $D(0, 1)$, to również wielomian P ma w kole $D(0, 1)$ dokładnie dwa pierwiastki, licząc z krotnościami. Podobnie rozumując, zauważamy, że ponieważ każda liczba $z \in \gamma_2^*$ spełnia warunek $|z| = 2$, a więc także

$$\begin{aligned}|P(z) - Q(z)| &= |6z^2 + 1| \le |6z^2| + |1| = 6|z|^2 + 1 = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25 \\ &< 128 = 4 \cdot 2^5 = 4|z|^5 = |4z^5| = |Q(z)|,\end{aligned}$$

czyli w szczególności $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$, to na mocy twierdzenia Rouchégo wielomiany P i Q mają w kole $D(0, 2)$ taką samą liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami). Skoro zatem wielomian Q ma na płaszczyźnie zespolonej tylko jedno miejsce zerowe, i jest ono pierwiastkiem krotności pięć w punkcie $z = 0$ należącym do koła $D(0, 2)$, to również wielomian P ma w kole $D(0, 2)$ dokładnie 5 pierwiastków, licząc z krotnościami. Stąd wnioskujemy, że w zbiorze

$$\{z \in \mathbb{C} : \; 1 \le |z| < 2\} = D(0, 2) \setminus D(0, 1)$$

wielomian P ma, licząc z krotnościami, dokładnie 5-2=3 pierwiastki. Żaden z nich nie należy do okręgu $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}$, bo wykazaliśmy już, że gdy $|z| = 1$, to $|P(z) - R(z)| < |R(z)|$, a zatem $|P(z)| \ge |R(z)| - |P(z) - R(z)| > 0$, czyli $|P(z)| \ne 0$. Wielomian P ma więc trzy pierwiastki (licząc z krotnościami) w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : \; 1 < |z| < 2\}$.

Egzamin zerowy — Funkcje Analityczne

25.01.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)
Policz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Zadanie 2 (5 p.)
Zbadać liczbę zer (uwzględniając krotności) wielomianu $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 3 (15 p.)
Rozważmy funkcję

$$f(z) = \exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) \cdot \frac{(z+1)(z-3)}{(z-2i)(z+4i)}.$$

(a) (5 p.) Znajdź wszystkie punkty osobliwe funkcji f i określ ich typ.

(b) (5 p.) Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon 3 < |z| < 4\}$ oraz rozważmy drogę zamkniętą $\gamma \colon [0,1] \to \Omega$, daną wzorem $\gamma(t) = \frac{7}{2}\exp(4\pi i t)$. Wyznacz wartość całki

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

(c) (5 p.) Czy na obszarze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f)$?

Rozwiązanie:

(a) Funkcja f jest holomorficzna na obszarze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2i, -4i, 10, -10\}$. W punktach $z = 2i, -4i$ mamy bieguny rzędu jeden. Aby określić typ osobliwości w nieskończoności, policzmy granicę

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = e^{-1},$$

zatem w nieskończoności funkcja f ma osobliwość usuwalną. Pozostaje nam tylko zbadać zachowanie funkcji f w otoczeniach punktów $z = \pm 10$.

Najpierw zauważmy, że

$$\exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) = \exp\left(-1 + \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10-z} + \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10+z}\right) =$$
$$= e^{-1}\cdot\exp\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10-z}\right)\cdot\exp\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10+z}\right).$$

Zatem w pewnym otoczeniu V punktu $z = 10$ funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(z) = \exp\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10-z}\right)\cdot h(z),$$

gdzie funkcja h jest holomorficzna na tym otoczeniu. Na otoczeniu V mamy

$$\exp\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10-z}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{11^n}{2^n(10-z)^n},$$

zatem, korzystając z charakteryzacji punktów osobliwych w terminach szeregu Laurenta, wnioskujemy, że funkcja $\exp\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{10-z}\right)$ ma istotną osobliwość w punkcie $z = 10$. W konsekwencji funkcja f ma istotną osobliwość w punkcie $z = 10$.

Podobnie sprawdzamy, że funkcja f ma istotną osobliwość w punkcie $z = -10$.

(b) Niech $Z(f)$ i $B(f)$ będą zbiorami zer i biegunów, odpowiednio, funkcji f wewnątrz dysku $D(0, \frac{7}{2})$. Na mocy zasady argumentu mamy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in Z(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(z)m(z) + \sum_{b\in B(f)} \mathrm{Ind}_\gamma(z)m(z),$$

gdzie $m(z)$ oznacza krotność f w punkcie z. Mamy

$$Z(f) = \{-1, 3\}, \quad B(f) = \{2i\}.$$

Dla $z \in Z(f)\cup B(f)$ mamy

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 2,$$

oraz

$$m(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z(f), \\ -1, & z \in B(f). \end{cases}$$

Podsumowując,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\,(2+2-2) = 4\pi i.$$

(c) Gdyby na obszarze Ω istniała holomorficzna gałąź ϕ funkcji $\log(f)$, wówczas funkcja ϕ byłaby funkcją pierwotną funkcji $\frac{f'}{f}$. To by oznaczało, że dla dowolnej drogi zamkniętej γ w Ω mielibyśmy

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0.$$

W poprzednim punkcie znaleźliśmy przykład drogi zamkniętej w Ω, dla której powyższa całka nie znika. Zatem na obszarze Ω nie istnieje funkcja pierwotna funkcji $\frac{f'}{f}$. W konsekwencji na obszarze Ω nie istnieje holomorficzna gałąź funkcji f.

Zadanie 4 (10 p.)

Znajdź maksymalny (w sensie inkluzji) obszar, na którym całka

$$f(z) = \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt$$

definiuje funkcję holomorficzną.

Rozwiązanie:

Zacznijmy zatem od rozstrzygnięcia dla jakich $z \in \mathbb{C}$ istnieje całka

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt.$$

Powyższa całka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka

$$\int_{-\infty}^{1} \left|\frac{e^{z^2 t}}{2-t}\right| dt = \int_{-\infty}^{1} \frac{\exp\big(\mathrm{Re}(z^2)t\big)}{2-t}\, dt.$$

Zatem dla $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 0$ powyższa całka jest nieskończona, a dla $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z^2) > 0\}$, powyższa całka jest skończona.

Zadanie można rozwiązać dwoma metodami: przy pomocy twierdzenia Weierstrassa lub twierdzenia Morery. Omówimy najpierw rozwiązanie korzystające z twierdzenia Weierstrassa.

Rozwiązanie nr 1 korzystające z twierdzenia Weierstrassa.

Korzystając z jednego z twierdzeń z wykładu stwierdzamy, że dla dowolnych $a < b < 2$ całka

$$\int_{a}^{b} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt$$

definiuje funkcję holomorficzną na Ω. W szczególności, dla każdego $n \geqslant 1$ otrzymujemy funkcję holomorficzną na Ω daną przy pomocy całki

$$f_n(z) = \int_{-n}^{1} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt.$$

Dodatkowo, dla każdego $z \in \Omega$ mamy

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt.$$

Na mocy twierdzenia Weierstrassa, jeśli na zbiorze otwartym $\Omega_0 \subset \Omega$ funkcje f_n zbiegają niemal jednostajnie, wówczas ich granica jest funkcją holomorficzną.

Ustalmy teraz dowolne $r > 0$. Jeśli $\mathrm{Re}(z^2) \geqslant r$, wówczas dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}_+$ takich, że $m > n$, mamy

$$\begin{aligned}\left|\int_{-m}^{-n} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt\right| &\leqslant \int_{-m}^{-n} \frac{\exp(\mathrm{Re}(z^2)t)}{2-t}\, dt \leqslant \frac{1}{n+2}\int_{-m}^{-n} e^{rt}\, dt\\ &= \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(e^{-rn} - e^{-rm}\right) \leqslant \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{r}\cdot e^{-rn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Stąd, dla dowolnego $\epsilon > 0$, istnieje $n > 0$, które będzie zależało od r, takie, że dla dowolnego $m > n$ mamy

$$|f_n(z) - f_m(z)| = \left| \int_{-m}^{-n} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\, dt \right| < \epsilon.$$

Zatem, ciąg funkcji f_n zbiega jednostajnie do swojej granicy na zbiorze $\{z\colon \operatorname{Re}(z^2) \geqslant r\}$. W konsekwencji, f_n zbiega niemal jednostajnie do swojej granicy na zbiorze Ω i granica jest funkcją holomorficzną na Ω.

Z racji tego, że w zadaniu było pytanie o maksymalny obszar, to jako odpowiedź można podać dowolną ze składowych spójnych zbioru Ω, tj.

$$\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z^2) > 0,\ \operatorname{Re}(z) > 0\},$$
$$\Omega_- = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z^2) > 0,\ \operatorname{Re}(z) < 0\}.$$

Rozwiązanie nr 2 korzystające z twierdzenia Morery.